АБСТРАКТНАЯ ПРИБЛИЖЕННАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ В ТЕОРИИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

В.В. Линник, Н.Б. Плещинский (Казань)

1^0. Пусть A – линейный оператор, действующий из нормированного пространства X в X, $\overline{A}$ – линейный оператор, действующий из нормированного пространства $\overline{X}$ в $\overline{X}$. Пусть соответствие между элементами пространств X и $\overline{X}$ задают такие оператор аппроксимации $T : X \to \overline{X}$ и интерполяции $S : \overline{X} \to X$, что $ST = I$ (тождественный оператор). При этом оператор ST – проектор в X. Будем считать в дальнейшем, что операторы S и T ограничены. Предполагая, что свойства оператора $\overline{A}$ исследовать проще, чем свойства оператора A, будем говорить, что пространство $\overline{X}$ и оператор $\overline{A}$ аппроксимируют пространство X и оператор A.

В работе [1] для более общего случая получены условия, при которых из обратимости точного оператора следует обратимость аппроксимирующего оператора, и наоборот. Если качество аппроксимации оператора A оператором $\overline{A}$ оценивать неравенством

$$||(\overline{A} - TAS)\overline{x}|| \le m_1 \, ||\overline{x}|| \quad \forall \overline{x} \in D(\overline{A}) \tag{1}$$

или

$$||(A - S\overline{A}T)x|| \le m_1 \, ||x|| \quad \forall x \in D(A), \tag{2}$$

а близость пространств X и $\overline{X}$ – неравенством

$$||(ST - I)AS\overline{x}|| \le m_2 \, ||\overline{x}|| \quad \forall \overline{x} \in D(\overline{A}) \tag{3}$$

или

$$||(ST - I)x|| \le m_2 \, ||x|| \quad \forall x \in D(A) \tag{4}$$

(здесь постоянные m_1 и m_2 не зависят от x и $\overline{x}$), то справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Если оператор A имеет ограниченный левый обратный, то есть*

$$\exists m_0 > 0 \mid ||Ax|| \geq m_0 ||x|| \quad \forall x \in D(A) \tag{5}$$

и выполнены условия (1) и (3), причем

$$(m_1 ||S|| + m_2) ||T|| < m_0, \tag{6}$$

то оператор $\overline{A}$ имеет ограниченный левый обратный.

Теорема 2. *Если оператор $\overline{A}$ имеет ограниченный левый обратный, то есть*

$$\exists m_0 > 0 \mid ||\overline{A}\overline{x}|| \geq m_0 ||\overline{x}|| \quad \forall \overline{x} \in D(\overline{A}) \tag{7}$$

и выполнены условия (2) и (4), причем

$$m_1 ||S|| ||T|| < m_0(1 - m_2), \tag{8}$$

то оператор A имеет ограниченный левый обратный.

При обосновании численных методов решения линейных задач обычно рассматриваются последовательности аппроксимирующих пространств $\overline{X} = \overline{X}^n$ и аппроксимирующих операторов $\overline{A} = \overline{A}^n$. При этом постоянные m_1, m_2 в оценках (1)–(4) также зависят от n. Если установлено, что $m_1(n) \to 0$ и $m_2(n) \to 0$ при $n \to +\infty$ (как правило, это имеет место в конкретных задачах) и m_0 в неравенстве (7) не зависит от n, то условия (6) и (7) будут выполнены начиная с некоторого значения n.

2^0. Пусть λ – комплексный параметр. Рассмотрим точную спектральную задачу

$$Ax - \lambda x = 0, \quad x \in X \tag{9}$$

и аппроксимирующую ее спектральную задачу

$$\overline{A}\overline{x} - \lambda\overline{x} = 0, \quad \overline{x} \in \overline{X}. \tag{10}$$

Исследуем, как связаны друг с другом множества собственных значений операторов A и $\overline{A}$. Будем также рассматривать последовательности спектральных задач вида (10), соответствующих последовательностям пространств $\overline{X} = \overline{X}^n$ и операторов $\overline{A} = \overline{A}^n$ (не указывая в дальнейшем номера элементов этих последовательностей). Ряд утверждений о сходимости последовательностей аппроксимирующих собственных значений и собственных элементов, а также оценки погрешности приближенных собственных значений можно найти, например, в книгах [2], [3], [4].

Следует ожидать, что если точные и аппроксимирующие пространства и операторы близки друг к другу (в смысле неравенств (1)–(4)), то и собственные пары операторов A и $\overline{A}$ близки.

Теорема 3. *Пусть операторы A и $\overline{A}$ вполне непрерывны.*

1. Если последовательность собственных значений аппроксимирующих операторов сходится, то ее предел – собственное значение точного оператора.

2. Любое собственное значение точного оператора является пределом некоторой последовательности собственных значений аппроксимирующих операторов.

Это утверждение нетрудно получить с помощью теорем 1 и 2. Действительно, вне круга с центром в начале координат на комплексной плоскости может находиться только конечное число собственных значений вполне непрерывного оператора. Из теоремы 1, например, следует, что если при некотором λ оператор $A - \lambda I$ обратим слева и в условиях (1) и (3) постоянные m_1 и m_2 достаточно малы, то и оператор $\overline{A} - \lambda I$ обратим слева. Иными словами, собственные значения аппроксимирующего оператора не могут существовать там, где нет собственных значений точного оператора.

Аналогичное доказательство при несколько иных предположениях имеется в [2], §18.

3⁰. Пусть X – гильбертово пространство. Обозначим $\tilde{A} = S\overline{A}T$. Если $(\lambda_0, \overline{x}_0)$ –собственная пара аппроксимирующего оператора, то есть решение задачи (10), то $\lambda_0, \tilde{x}_0 = S\overline{x}_0$ – собственная пара оператора $\tilde{A}$, то есть решение спектральной задачи

$$\tilde{A}x - \lambda x = 0, \quad x \in X.$$

Пусть собственный элемент нормирован: $(\tilde{x}_0, \tilde{x}_0) = 1$.

Будем искать решение точной спектральной задачи (9) в виде

$$x = \tilde{x}_0 + \Delta x, \quad \lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$$

при дополнительном условии нормировки $(x, \tilde{x}_0) = 1$, или, что одно и то же,

$$(\Delta x, \tilde{x}_0) = 0. \tag{11}$$

Тогда должно выполняться равенство

$$(\tilde{A} + \Delta A)(\tilde{x}_0 + \Delta x) = (\lambda_0 + \Delta\lambda)(\tilde{x}_0 + \Delta x),$$

здесь $\Delta A = A - \tilde{A}$. Так как $\tilde{A}\tilde{x}_0 = \lambda_0\tilde{x}_0$, то

$$(\tilde{A} - \lambda_0 I)\Delta x = \Delta\lambda(\tilde{x}_0 + \Delta x) - \Delta A(\tilde{x}_0 + \Delta x). \tag{12}$$

Умножив скалярно обе части (12) на $\tilde{x}_0$ и приняв во внимание условие нормировки (11), получим

$$\Delta\lambda = (\Delta A(\tilde{x}_0 + \Delta x), \tilde{x}_0). \tag{13}$$

Теперь уравнение (12) можно записать в виде

$$\Delta x = TP(\Delta x), \tag{14}$$

где T - обратный к $\tilde{A} - \lambda_0 I$ оператор (линейный) и

$$P(\Delta x) = (\Delta A(\tilde{x}_0 + \Delta x), \tilde{x}_0)(\tilde{x}_0 + \Delta x) - \Delta A(\tilde{x}_0 + \Delta x)$$

(P - нелинейный оператор). Оператор $\tilde{A} - \lambda_0 I$ обратим, если рассматривать в качестве его области определения подпространство X, ортогональное всем собственным элементам $\tilde{A}$, соответствующим собственному значению λ_0.

Теорема 4. *Если T - ограниченный оператор и*

$$||\Delta A|| \le r < \frac{1}{3||T||},$$

то существует единственное решение уравнения (14).

Действительно, если $||TP'(\Delta x)|| \le q < 1 \ \forall \Delta x$, то оператор TP - сжимающий. Но $||P'(\Delta x)|| \le 3||\Delta A||$.

Легко видеть, что условие теоремы 4 будет выполнено, если в неравенстве (2) $m_1 \to 0$ при $n \to \infty$. Оценки погрешности и скорость сходимости метода - обычные для метода последовательных приближений.

Аналогичное утверждение можно получить, если точный и аппроксимирующий операторы зависят от спектрального параметра. Пусть точная спектральная задача имеет вид

$$A(\lambda)x - \lambda x = 0, \quad x \in X,$$

а аппроксимирующая задача -

$$\overline{A}(\lambda)\overline{x} - \lambda\overline{x} = 0, \quad \overline{x} \in \overline{X}.$$

В этом случае вместо независимых уравнений (13) и (14) будем иметь систему уравнений [5]

$$\begin{gathered} \Delta\lambda = \left(\left[A(\lambda_0 + \Delta\lambda) - \tilde{A}(\lambda_0)\right](\tilde{x}_0 + \Delta x), \tilde{x}_0\right), \\ \Delta x = \left[\tilde{A}(\lambda_0) - \lambda_0 I\right]^{-1}\left[\Delta\lambda\, I - A(\lambda_0 + \Delta\lambda) + \tilde{A}(\lambda_0)\right](\tilde{x}_0 + \Delta x). \end{gathered} \tag{15}$$

4^0. В работе [6] предложен пошаговый итерационный алгоритм нахождения волноводных мод планарного диэлектрического волновода с произвольным профилем показателя преломления или (и) при условии, что показатель преломления волноводного слоя периодически изменяется в одном из продольных направлений. Собственные волны (моды) плоского диэлектрического волновода [7] представляют собой нетривиальные решения однородной системы уравнений Максвелла, удовлетворяющие условиям сопряжения на границах раздела сред волноводной структуры. Если показатели преломления подложки, волноводного слоя и покровной среды планарного волновода постоянны, то частные решения однородной задачи сопряжения могут быть найдены методом разделения переменных. Для некоторых градиентных волноводов (показатель преломления волноводного слоя изменяется в направлении нормали к границе) также известны явные выражения нетривиальных решений задачи сопряжения, определяющих волноводные моды.

Задача о собственных волнах планарного диэлектрического волновода сводится к спектральной задаче для дифференциального уравнения 2-го порядка

$$\begin{gathered} f''(z) + C(z,\lambda)f(z) = 0, \\ f'(\alpha) + A(\lambda)f(\alpha) = 0, \quad f'(\beta) + B(\lambda)f(\beta) = 0. \end{gathered} \tag{16}$$

Пусть близкая к ней (приближенная) спектральная задача

$$\tilde{f}''(z) + \tilde{C}(z,\lambda,p)\tilde{f}(z) = 0,$$

$$\tilde{f}'(\alpha) + A(\lambda)\tilde{f}(\alpha) = 0, \quad \tilde{f}'(\beta) + B(\lambda)\tilde{f}(\beta) = 0$$

имеет решение $(\tilde{\lambda},\ \tilde{f}(z))$, причем собственная функция нормирована условием

$$(\tilde{f},\tilde{f}) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \tilde{f}^2(z)\,dz = 1.$$

Если искать решение точной задачи в виде $\lambda = \tilde{\lambda} + \Delta\lambda$, $f(z) = \tilde{f}(z) + \Delta f(z)$, то для определения приращения собственной пары получим краевую задачу

$$\begin{gathered} \Delta f''(z) + \tilde{C}(z,\tilde{\lambda})\,\Delta f(z) = -\Delta C(z,\tilde{\lambda},\Delta\lambda)\,[\tilde{f}(z) + \Delta f(z)], \\ \Delta f'(\alpha) + A(\tilde{\lambda})\,\Delta f(\alpha) = -\Delta A(\tilde{\lambda},\Delta\lambda)\,[\tilde{f}(\alpha) + \Delta f(\alpha)], \\ \Delta f'(\beta) + B(\tilde{\lambda})\,\Delta f(\beta) = -\Delta B(\tilde{\lambda},\Delta\lambda)\,[\tilde{f}(\beta) + \Delta f(\beta)], \end{gathered} \tag{17}$$

где

$$\Delta C(z,\tilde{\lambda},\Delta\lambda) = C(z,\tilde{\lambda}+\Delta\lambda) - \tilde{C}(z,\tilde{\lambda}),$$

$$\Delta A(\tilde{\lambda},\Delta\lambda) = A(\tilde{\lambda}+\Delta\lambda) - \tilde{A}(\tilde{\lambda}),$$

$$\Delta B(\tilde{\lambda},\Delta\lambda) = B(\tilde{\lambda}+\Delta\lambda) - \tilde{B}(\tilde{\lambda}),$$

и дополнительное условие нормировки

$$(\Delta f, \tilde{f}) = \int_{\alpha}^{\beta} \Delta f(z)\, \tilde{f}(z)\, dz = 0. \tag{18}$$

Отметим, что в уравнения (17), (18) приращение $\Delta f(z)$ входит линейно, а приращение $\Delta\lambda$ – нелинейно. Из тождества Грина можно получить другое уравнение

$$-\int_{\alpha}^{\beta} \tilde{f}(z)\, [\tilde{f}(z)\Delta f(z)]\, \Delta C(x, \tilde{\lambda}, \Delta\lambda)\, dz +$$

$$+\tilde{f}(\beta)\, [\tilde{f}(\beta)\Delta f(\beta)]\, \Delta B(\tilde{\lambda}, \Delta\lambda) -$$

$$-\tilde{f}(\alpha)\, [\tilde{f}(\alpha)\Delta f(\alpha)]\, \Delta A(\tilde{\lambda}, \Delta\lambda) = 0. \tag{19}$$

При численном решении уравнений (17), (19) методом Ньютона в сочетании с методом Зейделя следует учитывать, что все собственные значения спектральной задачи (соответствующие волноводным модам) лежат на отрезке относительно малой длины. Из условий сходимости метода следует, что приближенная и точная задачи должны быть достаточно близки, то есть должна быть достаточно мала норма $||\Delta A||$, где A – оператор, соответствующий краевой задаче. Этот эффект легко обнаруживается и в ходе вычислений.

Рассмотрим такое параметрическое семейство спектральных задач [6]

$$\begin{gathered} f''(z) + C(z, \lambda, p) f(z) = 0, \\ f'(\alpha) + A(\lambda) f(\alpha) = 0, \quad f'(\beta) + B(\lambda) f(\beta) = 0 \end{gathered} \tag{20}$$

с параметром $p \in [0, 1]$, что при $p = 0$ известна собственная пара $(\lambda^0, f^0(z))$, а при $p = 1$ задача (20) совпадает с исходной задачей (16) о собственных волнах волновода. Пусть $p^{(n)}$, $n = 0..N$ – возрастающие значения параметра p, причем $p^{(0)} = 0$, $p^{(N)} = 1$ и $p^{(n)} = p^{(n-1)} + \Delta p$ $\forall n = 1..N$. На шаге с номером n пошагового алгоритма вычисляются приращения $\Delta\lambda^{(n)}$ и $\Delta f^{(n)}(z)$, соответствующие приращению Δp. В работе [6] вместо уравнений (17) и (19) использовалась линеаризованная система уравнений для приращений.

Литература

[1] Плещинский Н.Б. *К абстрактной теории приближенных методов решения линейных операторных уравнений* // Изв. вузов. Матем. – 2000. – №3. – С.39–47.

[2] Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. *Приближенное решение операторных уравнений.* – М.: Наука, 1969. – 258 с.

[3] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональый анализ.* – М.: Наука, 1984. – 752 с.

[4] Треногин В.А. *Функциональый анализ.* – М.: Наука, 1980. – 496 с.

[5] Linnik V.V., Pleshchinskii N.B. *On perturbation of the spectrum of planar dielectric waveguide by refraction index profile*— // Conf. Proc. 2002 Int. Conf. Mathematical Methods in Electromagnetic Theory MMET*02. Kiev, Ukraine, Sept. 10-13, 2002. Vol.2. – P.665–667.

[6] Косолапова А.В., Плещинский Н.Б. *О возмущении собственных волн планарного диэлектрического волновода профилем показателя преломления* // Казань, Казанск. гос. ун-т. – 1995, 10 с. (Деп. в ВИНИТИ 05.12.95, N3213 – В95).

[7] Адамс М. *Введение в теорию оптических волноводов.* – М.: Мир, 1984. – 512 с.